**WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA**

**im. Jarosława Dąbrowskiego**

**WYDZIAŁ MECHATRONIKI I LOTNICTWA**

|  |
| --- |
|  |



**PRACA DYPLOMOWA**

**STUDIA WYŻSZE**

sierż. pchor. inż. Ernest PAPROCKI

*(stopień, imiona i nazwisko studenta)*

***Projekt układu analizy widmowej dla zestawu WEGA***

***Design of the spectral analysis unit for the SA-5 Gammon anti-aircraft system***

*(temat pracy dyplomowej w języku polskim i języku angielskim)*

***Mechatronika – Eksploatacja przeciwlotniczych zestawów rakietowych***

*(kierunek i specjalność studiów)*

dr inż. Stanisław GRZYWIŃSKI

*(tytuł/stopień naukowy, imię i nazwisko promotora pracy dyplomowej)*

WARSZAWA 2019

zadania

Opinia promotora

Recenzja pracy dyplomowej

# Spis treści

[Spis treści 9](#_Toc7148812)

[Wykaz oznaczeń i skrótów 11](#_Toc7148813)

[Wstęp 12](#_Toc7148814)

[1. Analiza sygnałów 13](#_Toc7148815)

[1.1. Sygnał dyskretny i cyfrowy 14](#_Toc7148816)

[1.2. Analiza częstotliwościowa 14](#_Toc7148817)

[1.3. Dyskretne przekształcenie Fouriera 15](#_Toc7148818)

[1.3.1. Symetria DFT 16](#_Toc7148819)

[1.3.2. Oś częstotliwości DFT 17](#_Toc7148820)

[1.3.3. Przeciek DFT 17](#_Toc7148821)

[1.3.4. Okna 18](#_Toc7148822)

[1.4. Szybkie przekształcenie Fouriera 20](#_Toc7148823)

[2. Próbkowanie sygnałów 24](#_Toc7148824)

[2.1. Aliasing17 24](#_Toc7148825)

[2.2. Twierdzenie o próbkowaniu 25](#_Toc7148826)

[2.3. Wstęgi boczne 26](#_Toc7148827)

[2.4. Próbkowanie dolnopasmowe 27](#_Toc7148828)

[2.5. Nadpróbkowanie 28](#_Toc7148829)

[2.5.1. Błędy kwantyzacji 29](#_Toc7148830)

[2.5.2. Szum kwantyzacji 29](#_Toc7148831)

[2.5.3. Redukcja szumu kwantyzacji 30](#_Toc7148832)

[2.6. Podpróbkowanie 31](#_Toc7148833)

[2.6.1. Warunki prawidłowego próbkowania pasmowego 32](#_Toc7148834)

[3. Układ określania prędkości w zestawie Wega 34](#_Toc7148835)

[3.1. Efekt Dopplera 34](#_Toc7148836)

[3.2. Zasada pracy radiolokacyjnej stacji podświetlania celów 34](#_Toc7148837)

[3.3. Układ analizy widmowej 35](#_Toc7148838)

[4. Symulacje komputerowe 37](#_Toc7148839)

[4.1. Badanie wpływu częstotliwości podpróbkowania na widmo sygnału 37](#_Toc7148840)

[Bibliografia 40](#_Toc7148841)

[Spis rysunków i tabel 41](#_Toc7148842)

[Spis rysunków 41](#_Toc7148843)

[Spis tabel 41](#_Toc7148844)

# Wykaz oznaczeń i skrótów

ADC – przetwornik analogowo-cyfrowy (ang. Analog to Digital Converter);

przetwornik A/C – przetwornik analogowo-cyfrowy;

lsb – najmniej znaczący bit (ang. least significant bit);

PSD – widmowa gęstość mocy (ang. power spectral density);

DFT – dyskretne przekształcenie Fouriera (ang. Discrete Fourier Transform);

FFT – szybkie przekształcenie Fouriera (ang. Fast Fourier Transform);

*ts*­ – czas pomiędzy kolejnymi próbkami;

*fs* – częstotliwość próbkowania;

*f­N* – częstotliwość Nyquista*;*

*f­pcz* – częstotliwość pośrednia*;*

*f­0* – częstotliwość nośna*;*

# Wstęp

Znaczący rozwój elektroniki spowodował, że przetwarzanie sygnałów znalazło zastosowanie praktycznie w każdej branży, także militarnej, szczególnie w dziedzinie radioelektroniki. Obecnie w wojsku radioelektronika to nie tylko łączność, ale także systemy obserwacji i ostrzegania, automatyzacja procesów dowodzenia i kierowania, radiolokacja, czy sterowanie bronią (np. rakietową).

# Analiza sygnałów[[1]](#footnote-1)

Pojęcie sygnału jest ściśle powiązane z pojęciem informacji. Sygnałem można określić przedstawienie informacji, która jest przystosowana do przesyłania na odległość. Przesyłanie informacji w tym sensie będzie polegało na przekazywaniu sygnałów, które tą informację zawierają. Sygnał przedstawiający informację musi mieć postać „materialną”, czyli musi nieść energię. W zależności od rodzaju przenoszonej energii, występują różne rodzaje sygnałów np. :

* sygnały mechaniczne z energią kinetyczną lub potencjalną,
* sygnały dźwiękowe z energią drgań akustycznych,
* sygnały elektryczne z energią prądu elektrycznego,
* sygnały radiowe z energią fal elektromagnetycznych,
* sygnały świetlne z energią fal świetlnych.

W związku z przetwarzalnością energii, sygnały również można poddawać przetwarzaniu i może ono być wielokrotne i odwrotne. Sygnały także mogą być przekształcane do innej postaci, nie zmieniając jednocześnie rodzaju energii.

Z kolei pojęcie analizy odnosi się do rozkładu całości na składniki i badanie każdego z nich osobno. Z tej ogólnej definicji wywodzą się bardziej szczegółowe określenia jak np. analiza sygnałów, która ma na celu ustalenie charakteru sygnału i wyciągnięcie treści informacji w nich zawartych.

Wyróżnia się trzy podstawowe rodzaje analizy sygnałów:

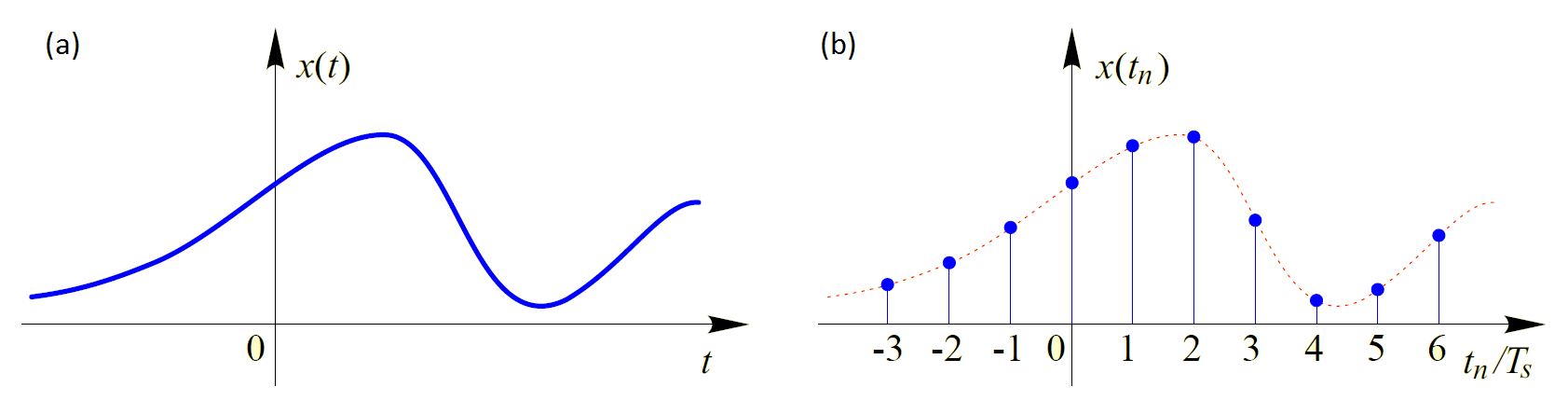
* analiza czasowa – polegająca na badaniu sygnału w dziedzinie czasu,
* analiza statystyczna – sprowadzająca się do wyznaczania parametrów statystycznych sygnałów jako procesów przypadkowych,
* analiza częstotliwościowa – obrazująca widma sygnału za pomocą funkcji harmonicznych.

Z punktu widzenia niniejszej pracy najbardziej interesująca jest analiza częstotliwościowa, dlatego poniżej omówiono ją dokładniej.

## Sygnał dyskretny i cyfrowy

Termin sygnał o czasie dyskretnym używany jest do określania sygnału, którego niezależna zmienna czasowa jest kwantowana. Otrzymany wówczas sygnał nie będzie sygnałem ciągłym, a jedynie zbiorem wartości sygnału w dyskretnych punktach osi czasu (Rys. 1). Odstępy czasu *t­s* pomiędzy kolejnymi wartościami wynikają z zastosowanej podczas kwantyzacji częstotliwości próbkowania *fs*. Zachodzi między nimi zależność opisana wzorem (1.1).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

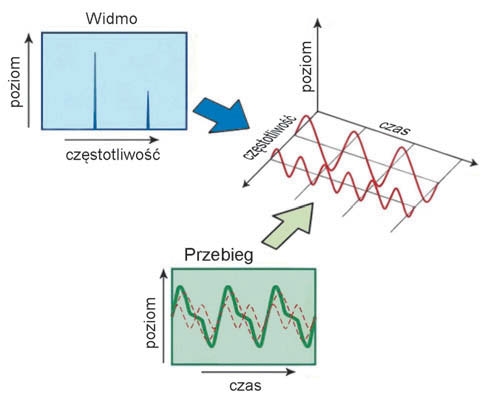


Rys. 1 Sygnał w dziedzinie czasu[[2]](#footnote-2): (a) reprezentacja przebiegu o czasie ciągłym, (b) dyskretna reprezentacja próbkowa.

Sygnał cyfrowy z kolei oprócz kwantowania osi czasu, ma również kwantowane wartości. W tym przypadku ważną rolę odgrywa przetwornik analogowo-cyfrowy, który dokonuje cyfryzacji sygnału. Od jego rozdzielczości bitowej zależeć będzie ilość wartości jakie może przyjąć sygnał, a co za tym idzie również precyzja pomiaru, gdyż dla n-bitowego przetwornika sygnał może przyjmować wartości jedynie od 0 do 2n-1.

## Analiza częstotliwościowa

Analiza widmowa sygnału, zwana również analizą częstotliwościową, pozwala spojrzeć na badany sygnał z całkowicie innej perspektywy. Niesinusoidalny charakter sygnału w dziedzinie czasu zostaje przedstawiony w sposób liczbowy, jako zbiór składowych harmonicznych (Rys. 2). Zawarte w sygnałach składowe częstotliwości mogą wiele powiedzieć o stanach i właściwościach obiektu, który je wygenerował, a także pozwalają na numeryczne odtworzenie sygnału pierwotnego.[[3]](#footnote-3)



Rys. 2 Analiza sygnału w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości[[4]](#footnote-4)

Historia narodzin analizy częstotliwościowej sięga początków XIX wieku, a dokładnie roku 1807, kiedy to francuski matematyk Jean Baptiste Joseph Fourier przedstawił artykuł zawierający tezę mówiącą, że każdy przebieg okresowy można wyrazić w postaci sumy sinusoidalnych fal o określonych częstotliwościach, amplitudach i fazach. Parametry te można wyznaczyć stosując analizę Fouriera. Sygnał zostanie wówczas przeobrażony z postaci czasowej na częstotliwościową.[[5]](#footnote-5)

## Dyskretne przekształcenie Fouriera

Dyskretne przekształcenie Fouriera jest, obok filtracji cyfrowej, najwydajniejszą i najpopularniejszą procedurą w dziedzinie cyfrowego przetwarzania sygnałów. Używana jest do wyznaczania zawartości częstotliwościowej sygnałów w dziedzinie czasu dyskretnego w sposób matematyczny. DFT wywodzi się od ciągłego przekształcenia Fouriera i jest zdefiniowane jako dyskretny ciąg w dziedzinie częstotliwości (wzór (1.2)).

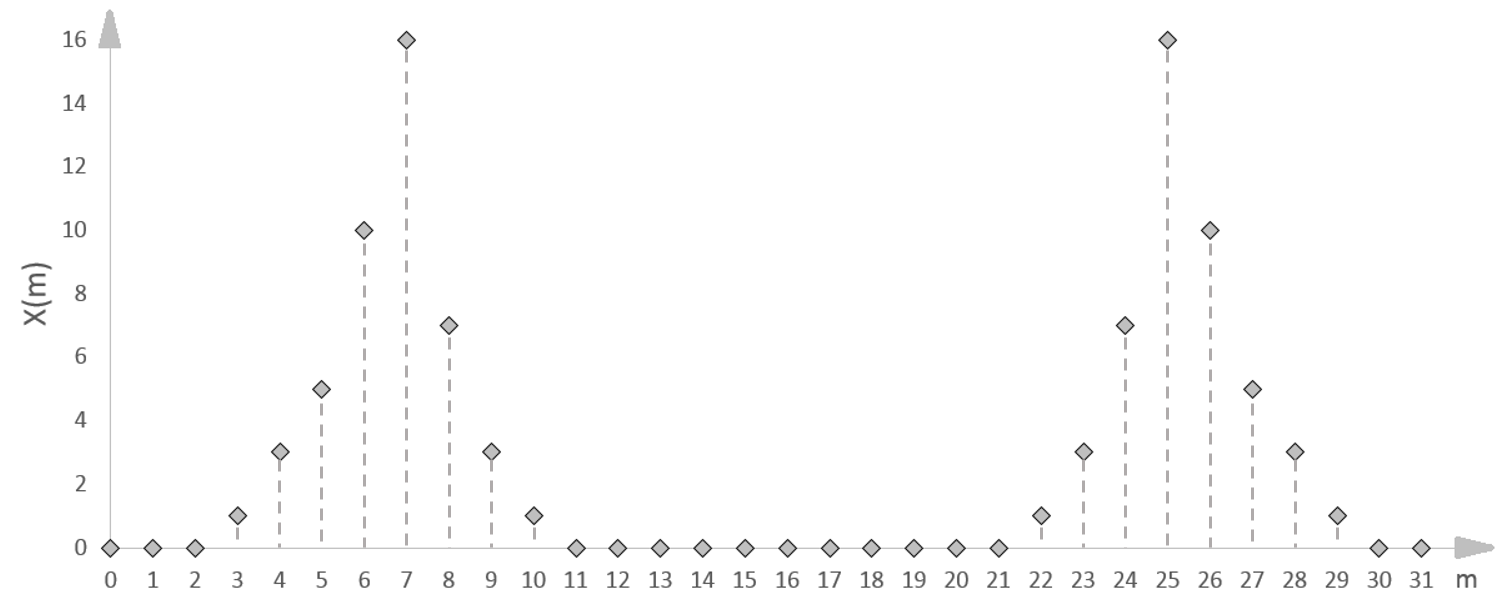
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | gdzie: |  |  |
|  |  |  | - *m*-ta składowa wyjściowa DFT, |
|  |  |  | - indeks próbki wyjściowej DFT, |
|  |  |  | - liczba wszystkich próbek ciągu wejściowego, |
|  |  |  | - indeks próbki wejściowej, |
|  |  |  | - ciąg próbek wejściowych, |
|  |  |  | - podstawa logarytmu naturalnego, |
|  |  |  | - . |

Indeksy próbek wejściowych *n* i próbek wyjściowych *m* zmieniają się zawsze w zakresie od 0 do *N –* 1. Oznacza to, że podając na wejście DFT *N* elementowy zbiór próbek o czasie dyskretnym, na wyjściu otrzymane zostanie *N* elementowe widmo sygnału o punktach rozłożonych równomiernie na osi częstotliwości. Ponadto, w przypadku sygnału rzeczywistego, wyjściowe wartości DFT są zwiększone   
*N*/2-krotnie w stosunku do amplitudy wejściowej[[6]](#footnote-6).

### Symetria DFT[[7]](#footnote-7)

Pomimo, że DFT przeznaczone jest do działania na ciągach zespolonych, to większość wejściowych sygnałów fizycznych taktowanych jest jako rzeczywiste. Dla takich przypadków otrzymany na wyjściu DFT zbiór będzie zawierał powielone informacje. Wartości wyjściowe dyskretnego przekształcenia Fouriera mają wówczas charakter symetryczny względem składowej o indeksie *m = N*/2. Oznacza to, że dla elementów o indeksach *m* ≥ (*N*/2), *m*-ta wartość wyjściowa będzie miała amplitudę taką samą jak (*N* – m)-ty element. W rezultacie po obliczeniu DFT uzyskuje się jedynie *N*/2 + 1 użytecznych danych, gdyż składowe indeksowane jako *m* = 0 i *m* = *N*/2 nie ulegają powieleniu. Zjawisko symetrii zostało przedstawione na Rys. 3.



Rys. 3 Przykładowe DFT[[8]](#footnote-8)

### Oś częstotliwości DFT

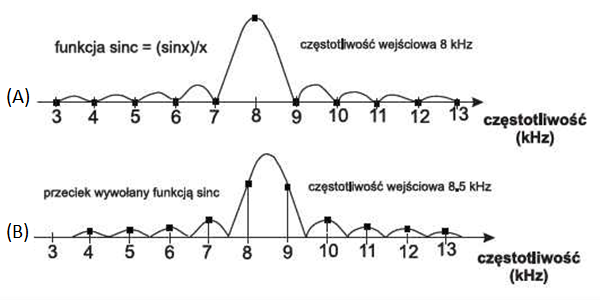
Znając częstotliwość *fs* z jaką próbkowany był sygnał oraz ilość *N*  pobranych w tym procesie próbek, możliwe jest wyliczenie częstotliwości które reprezentują poszczególne elementy zbioru wyjściowego DFT. Za pomocą wzoru (1.3) można określić częstotliwość jakiej odpowiada *m*-ty element.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Częstotliwość sprzężona z indeksem o numerze *m* = 1 określa rozdzielczość częstotliwościową widma i jest nazywana częstotliwością podstawową. Z kolei indeksowi *m* = 0 odpowiada składowa stała sygnału. Należy mieć na uwadze, że w związku z występowaniem zjawiska symetrii, zależność ze wzoru (1.3) ma zastosowanie jedynie dla *m*≤ *N*/2.

### Przeciek DFT[[9]](#footnote-9)

Właściwość DFT, jaką jest przeciek widma, powoduje, że wyniki otrzymane po przekształceniu są jedynie aproksymacją widm rzeczywistych oryginalnych sygnałów podanych na wejście. Zjawisko to jest widoczne, gdy przetwarzany sygnał wejściowy posiada składowe o częstotliwościach nie będących całkowitymi wielokrotnościami częstotliwości podstawowej. Składowe te wówczas ujawniają się w pewnym stopniu we wszystkich wartościach wyjściowych DFT, a ich rozkład ma charakter funkcji *sinc*. Wprawdzie istnieją sposoby na zminimalizowanie przecieku, jednak nie można wyeliminować go całkowicie. Przeciek dwóch różnych częstotliwości w widmach o częstotliwości podstawowej równej 1 kHz został przedstawiony na Rys. 4.



Rys. 4 Zjawisko przecieku widma[[10]](#footnote-10): (A) Funkcji o częstotliwości 8 kHz, (B) Funkcji o częstotliwości 8,5 kHz

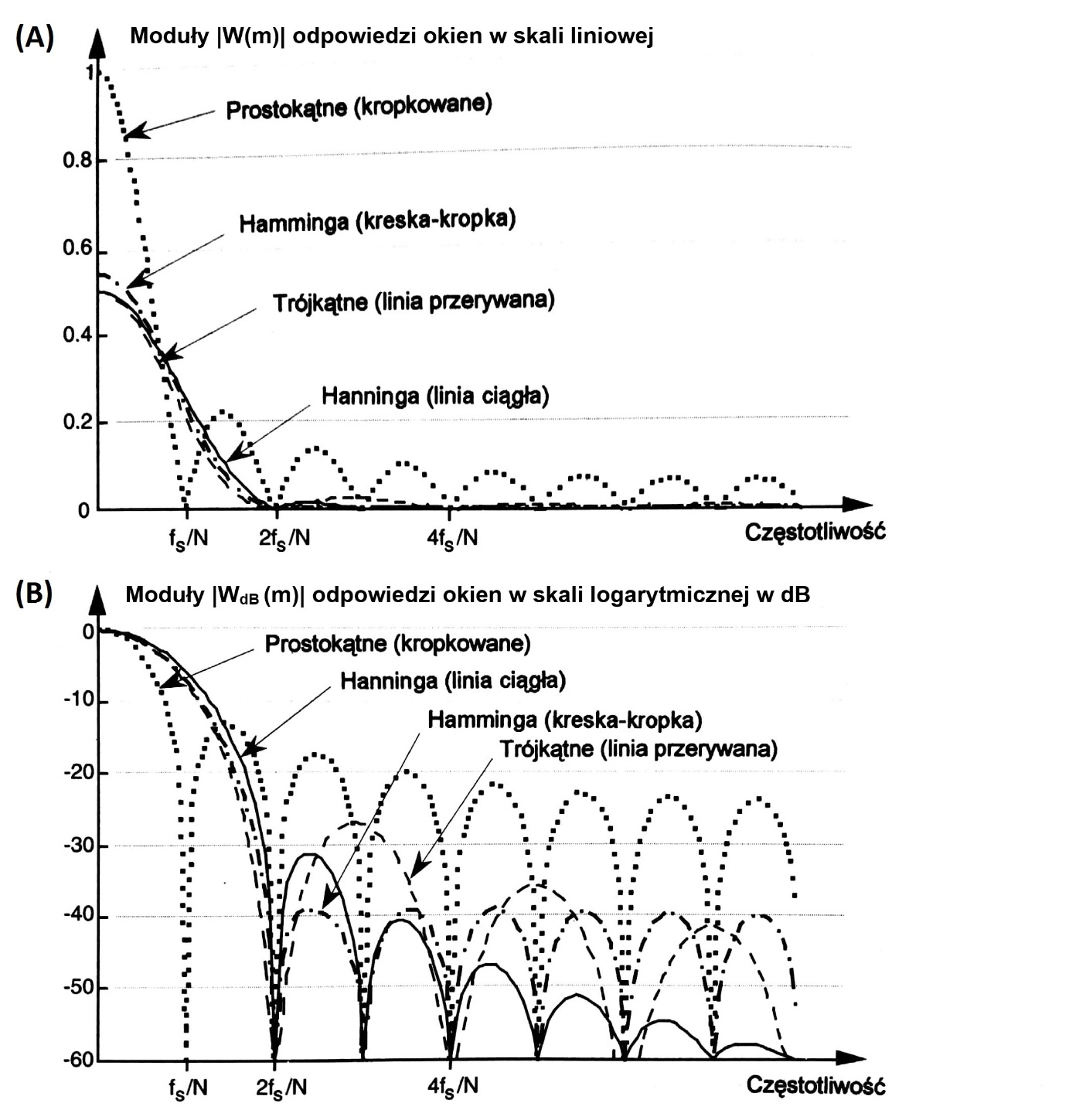
Przeciek widma występuje zawsze, lecz dla częstotliwości będących wielokrotnościami częstotliwości podstawowej, wartości wyjściowe DFT odpowiadają miejscom zerowym funkcji *sinc*, z wyjątkiem elementu reprezentującego częstotliwość sygnału wejściowego.

### Okna[[11]](#footnote-11)

Dyskretna transformata Fouriera może być przeprowadzona jedynie na skończonej ilości elementów, co za tym idzie przedział próbkowania musi mieć skończony czas trwania, nawet jeżeli próbkowany sygnał ma charakter nieskończony. Dlatego sygnał podawany na wejście DFT może być traktowany jest jako iloczyn sygnału wejściowego i okna prostokątnego o amplitudzie równej 1 w przedziale próbkowania i 0 poza tym przedziałem.

Twierdzenia o splocie w dziedzinie częstotliwości mówi, że „*mnożeniu sygnałów w dziedzinie czasu odpowiada splatanie ich widm w dziedzinie częstotliwości.*”[[12]](#footnote-12) Przedstawiony w rozdziale 1.3.3 przeciek widma o charakterze funkcji *sinc* wynika z faktu, iż ciągła transformata Fouriera sygnału prostokątnego jest funkcją *sin(x)/x*, a wynikowe widmo DFT jest splotem widma sygnału badanego i widma okna prostokątnego.

Zmieniając charakter okna czasowego, można minimalizować przeciek widma widoczny w listkach bocznych, lecz odbywa się to często kosztem szerokości listka głównego (co przekłada się na stratę rozdzielczości częstotliwościowej) i jego amplitudy. Dlatego też nie można jednoznacznie określić które okno czasowe będzie najlepsze dla zobrazowania widma. Wszystko zależy od właściwości jakie chce się uzyskać. Na Rys. 5 zostało przedstawione porównanie charakterystyk amplitudowych przykładowych okien czasowych.



Rys. 5 Moduły odpowiedzi okien[[13]](#footnote-13): (A) Skala liniowa, (B) Skala logarytmiczna

## Szybkie przekształcenie Fouriera[[14]](#footnote-14)

Wraz ze wzrostem punktów DFT do setek lub tysięcy, liczba wymaganych przetworzenia danych staje się ogromna i potrzebuje dużej ilości czasu, aby je przetworzyć. Celem przyspieszenia wykonywania obliczeń został opracowany algorytm nazywany szybkim przekształceniem Fouriera, lub algorytmem FFT o podstawie 2, ze względu na liczbę danych wejściowych wymaganych do dokonania obliczeń, która musi być całkowitą potęgą liczby dwa (*N* = 2*k*, gdzie *k* jest dowolną liczbą naturalną). W przypadku zwykłego DFT, wiele operacji arytmetycznych wykonywanych jest kilkukrotnie dla tych samych wartości. Algorytm FFT eliminuje te nadmiarowości i redukuje znacząco liczbę niezbędnych do wykonania operacji. Szybka transformata Fouriera jest jedynie odmianą DFT, dlatego charakteryzuje się wszystkimi jej cechy.

Wyprowadzenie FFT opiera się o podział ciągu próbek wejściowych na elementy o indeksach parzystych i nieparzystych. Adekwatnie postępuje się z otrzymanymi podzbiorami. Podział taki kontynuowany jest do momentu otrzymania dwuelementowych zbiorów, dlatego tak ważne jest, aby ilość próbek wejściowych była potęgą liczby 2. Następnie dla każdego dwuczłonowego zbioru wykonywane jest dwupunktowe DFT. Dwuelementowe widma składane są w czteroelementowe, te w ośmioelementowe itd., aż do uzyskania *N*-elementowego widma będącego widmem całego sygnału[[15]](#footnote-15).

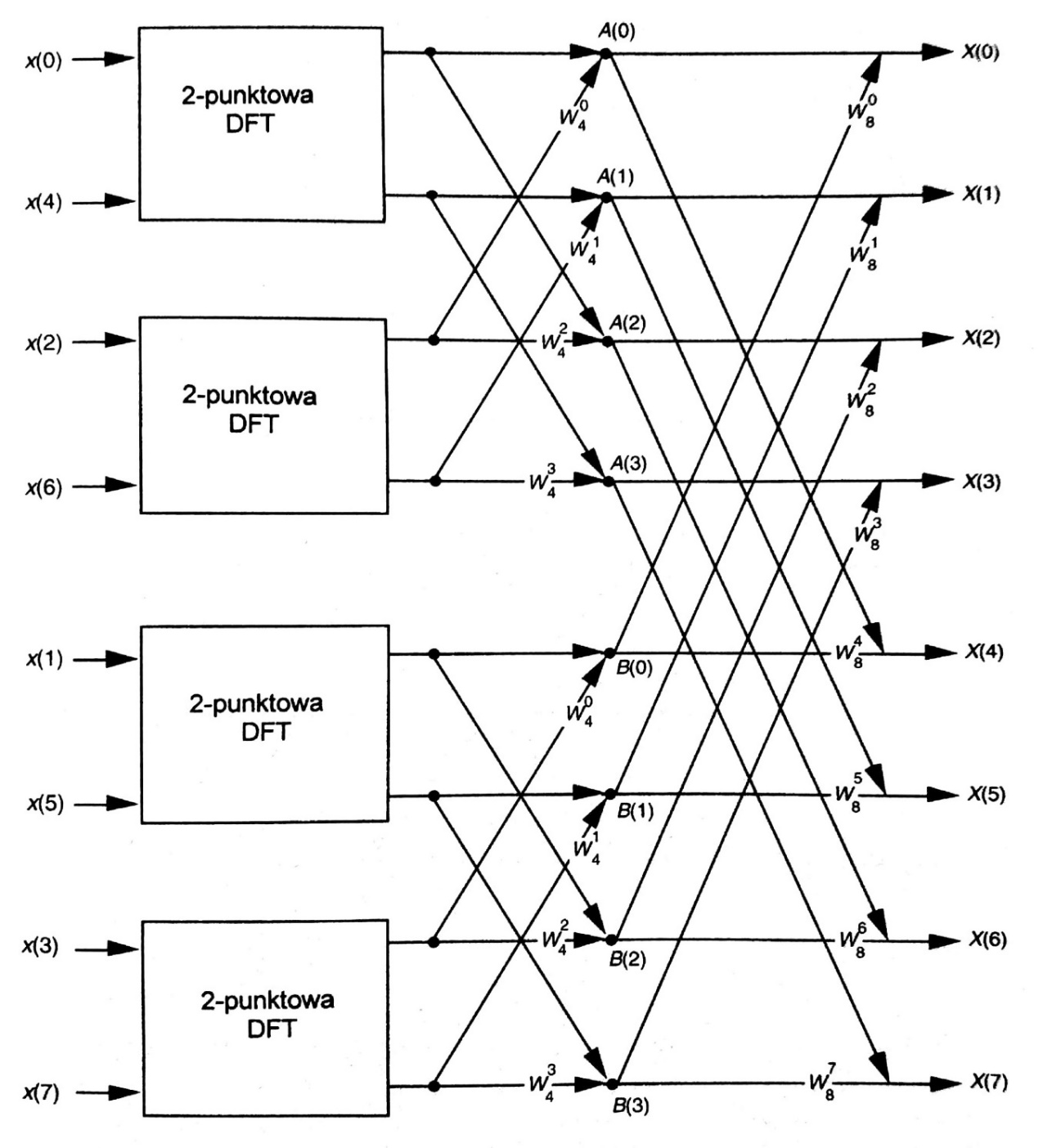
Przykładowy schemat analizy FFT został zaprezentowany na Rys. 6. Przedstawia on kolejne kroki w procesie przekształcania 2-punktowych DFT w 8-puntowe dyskretne widmo sygnału. Specyficzna kolejność występowania próbek wynika z zasady odwróconego bita zastosowanej w sortowaniu. W celu poprawnego zrozumienia zależności pomiędzy poszczególnymi stopniami FFT należy zdefiniować następujące równania:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Równanie (1.5) jest po prawdzie wzorem (1.2) podzielonym na dwa składniki z wyłączonym stałym kątem fazowym (). Podczas wykonywania analizy drugiej połowy *N*-elementowego DFT () stały kąt ma wyłącznie zmieniany znak na przeciwny. Z tego też powodu można, do obliczenia drugiej połowy, wykorzystać pierwsze *N*/2 wartości. Wówczas wzór (1.5) przyjmuje postać dwóch równań (1.8) i (1.9), dla których parametr *m* zmienia się w zakresie od 0 do (*N*/2) - 1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Analogicznie, na podstawie zależności pomiędzy wzorami (1.8) i (1.9), a wzorem (1.5), dokonywane są kolejne podziały, zmniejszając tym samym ilość operacji arytmetycznych niezbędnych do wykonania. Ostatecznie dochodzi się do uszeregowania 2-elementowych DFT, gdzie dalsze oszczędności już nie są możliwe.



Rys. 6 Implementacja 8-punktowej DFT za pomocą FFT[[16]](#footnote-16)

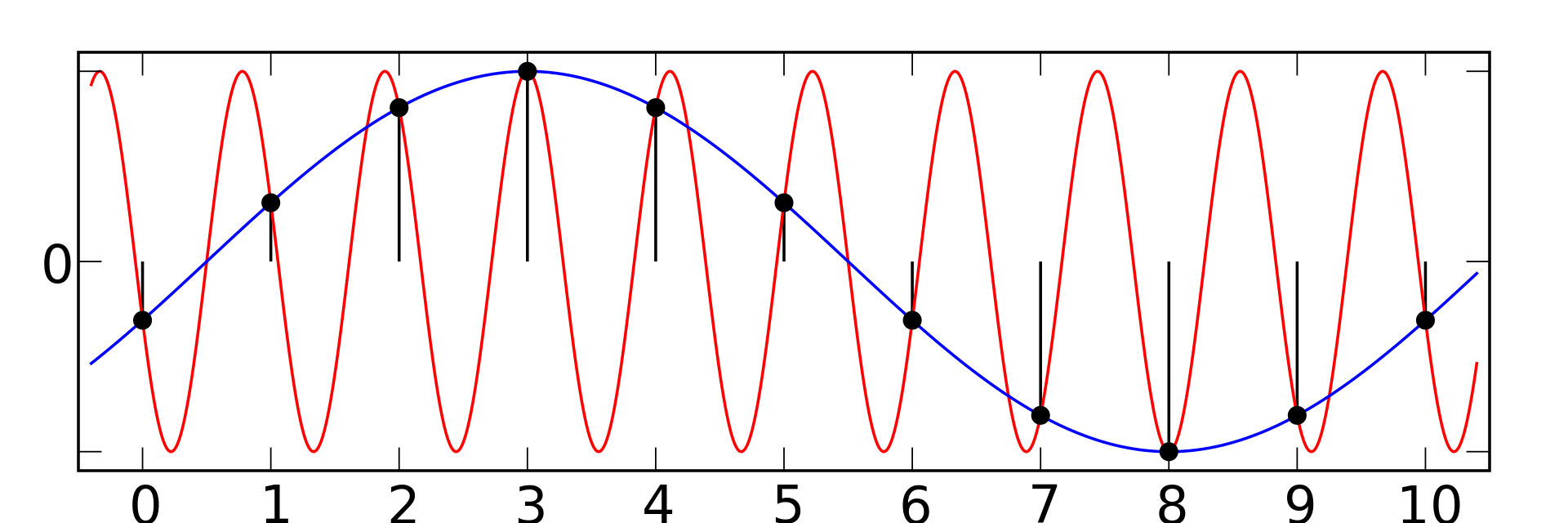
# Próbkowanie sygnałów

Próbkowanie równoległe jest obecne niemalże wszędzie gdzie jest mowa o cyfrowym przetwarzaniu sygnałów. Jego efektem jest reprezentacja sygnału ciągłego pod postacią ciągu próbek, które są pobierane w dyskretnych chwilach czasu. Proces ten polega na podaniu sygnału ciągłego na wejście przetwornika ADC, z wyjścia którego otrzymuje się ciąg wartości cyfrowych.

W kwestii próbkowania podstawowym parametrem jaki należy określić jest prędkość z jaką sygnał ciągły powinien być próbkowany, aby zachować jego zawartość informacyjną. Sygnały można próbkować z dowolną szybkością, a na wyjściu zawsze otrzyma się ciąg wartości dyskretnych, lecz nie zawsze te wartości będą prawidłowo reprezentowały sygnał oryginalny.[[17]](#footnote-17)

## Aliasing17

W dziedzinie częstotliwości występuje niejednoznaczność związana z próbkami dyskretnymi, nieistniejąca w przypadku sygnałów ciągłych. Polega ona na tym, że podczas próbkowania sygnału z prędkością *fs* próbek na sekundę, dla *k* będącego dowolną liczbą całkowitą, nie jest możliwe rozróżnienie spróbkowanych wartości przebiegów sinusoidalnych o częstotliwościach *f0* i *(f­0 + k\*fs)*. Niejednoznaczność częstotliwości została zaprezentowana na Rys. 7, który pokazuje, że oryginalny ciąg wartości może równie wiarygodnie reprezentować wartości różnych przebiegów sinusoidalnych. Właśnie takie zjawisko nazywane jest aliasingiem. Nie istnieje więc taki ciąg danych, który by reprezentował bez dwuznaczności tylko jedną sinusoidę, nie zawierając dodatkowych informacji.



Rys. 7 Niejednoznaczność częstotliwości[[18]](#footnote-18)

## Twierdzenie o próbkowaniu[[19]](#footnote-19)

Występowanie zjawiska aliasingu w procesie przetwarzania sygnałów narzuciło stosowanie się do twierdzenia o próbkowaniu, zwanego też, od nazwisk swoich autorów, twierdzeniem Shannona lub twierdzeniem Nyquista. Mówi ono, że sygnał może być prawidłowo spróbkowany, tylko jeżeli występujące w nim składowe częstotliwościowe są nie większe niż połowa częstotliwości próbkowania. W związku z powyższym twierdzeniem wyprowadzono również pojęcie częstotliwości Nyquista oznaczającej połowę częstotliwości próbkowania (wzór (2)).

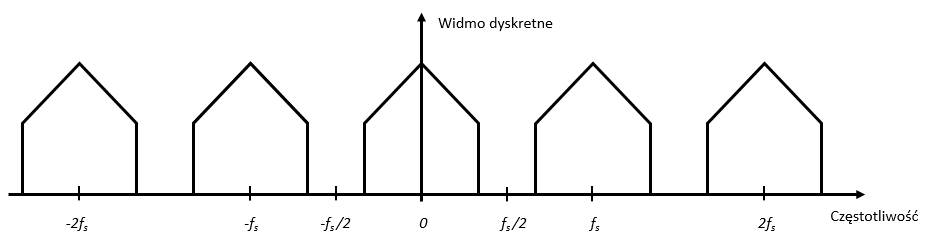
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gdy częstotliwość w sygnale wejściowym jest poniżej częstotliwości Nyquista, to występuje ona również w sygnale spróbkowanym. Jeżeli jednak częstotliwość sygnału wejściowego jest powyżej częstotliwości Nyquista, wówczas zjawisko aliasingu zmienia ją na taką, która może zostać zaprezentowana przez spróbkowane dane. Każda częstotliwość przebiegu ciągłego, która jest wyższa niż częstotliwość Nyquista posiada odpowiadającą jej częstotliwość znajdującą się w przedziale od 0 do *fs/2*. Jeżeli w tym przedziale znajduje się już jakiś sygnał, to wystąpienie aliasingu zsumuje się z nim powodując zniekształcenie lub stratę informacji dotyczących zarówno częstotliwości znajdujących się powyżej, jak i poniżej *fs/2*.

## Wstęgi boczne[[20]](#footnote-20)

W dziedzinie przetwarzania sygnałów istnieje teoretyczna koncepcja zwana ciągiem impulsów. Jest to sygnał ciągły złożony z nieskończenie wąskich szpilek (impulsów). Impulsy są identyczne w chwilach próbkowania z sygnałem oryginalnym, a wartość między nimi jest zerowa. Pod względem zawartości informacji ten teoretyczny ciąg impulsów i matryca liczb reprezentujących wartości próbek są identyczne. W dziedzinie czasu próbkowanie realizowane jest poprzez mnożenie oryginalnego sygnału przez ciąg impulsów o amplitudzie jednostkowej, których szpilki znajdują się w miejscach zwielokrotnionej częstotliwości próbkowania. Widma sygnałów mnożonych w dziedzinie czasu są poddawane operacji splotu, w wyniku czego widmo oryginalne zostaje powielone w miejscach występowania szpilek w widmie ciągu impulsów. Sygnał oryginalny traktowany jest jako zawierający częstotliwości dodatnie i ujemne.

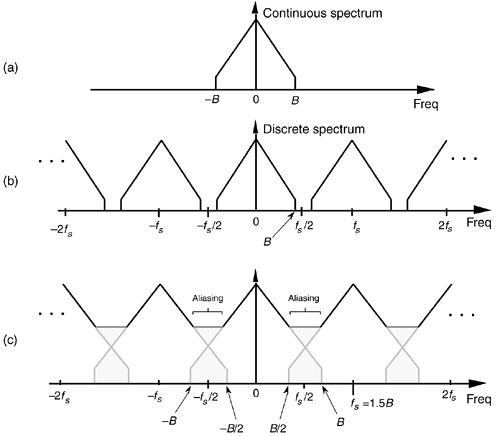
Próbkowanie sygnału przy wykorzystaniu ciągu impulsów daje powielone widmo sygnału oryginalnego. Po prawych stronach częstotliwości równych *k\*fs,* gdzie *k* jest dowolną liczbą całkowitą, powstaje kopia widma, zaś po lewych odwrócona kopia (kopia wartości ujemnej widma oryginalnego). Są one nazywane górną i dolną wstęgą boczną. Powielenie widma przedstawiono na Rys. 8.



Rys. 8 Powielenie widmowe sygnału spróbkowanego[[21]](#footnote-21)

## Próbkowanie dolnopasmowe

Próbkowanie dolnopasmowe wykorzystywane jest do analizy sygnałów w zakresie częstotliwości od 0 Hz do określonej wartości *B* (Rys. 9a). W celu prawidłowego przetworzenia takiego sygnału częstotliwość próbkowania *fs* powinna być większa niż *2B*, co wynika z omówionego wcześniej twierdzenia o próbkowaniu. W przypadku niespełnienia tego warunku, widmo sygnału zostanie zniekształcone zjawiskiem aliasingu widocznym na Rys. 9c, co spowoduje błędną interpretację sygnału. Należy pamiętać, że niezależnie od częstotliwości próbkowania *fs*, widmo spróbkowanego sygnału zawsze znajdzie się w przedziale częstotliwości od 0 do *fs/2*, jego lustrzanym odbiciu oraz w powielonych widmach (Rys. 9b i Rys. 9c). Dlatego tak ważne jest, aby odpowiednio dobrać częstotliwość próbkowanie do częstotliwości sygnału. Zapewni to prawidłową interpretację analizowanego sygnału i jego parametrów.



Rys. 9 Powielenia widmowe[[22]](#footnote-22): (a) oryginalne widmo ciągłe sygnału, (b) powielenia widmowe spróbkowanego sygnału dla *fs>2B*, (c) nakładanie się częstotliwości i występowanie aliasingu dla zbyt małej częstotliwości próbkowania, gdy *fs<2B*.

## Nadpróbkowanie[[23]](#footnote-23)

Oprócz standardowej metody, jaką jest próbkowanie dolnopasmowe, można użyć metody nadpróbkowania w procesie digitalizacji sygnału. Polega ona na próbkowaniu sygnału z częstotliwością znacznie większą, niż wynikająca z twierdzenia o próbkowaniu i jest wykorzystywana głównie w celu redukcji szumu kwantyzacji ADC. W celu wyjaśnienia zagadnienia związanego z nadpróbkowaniem należy w pierwszej kolejności omówić kwestię błędów i szumu kwantyzacji przetwornika A/C.

### Błędy kwantyzacji[[24]](#footnote-24)

Przetworniki A/C posiadają wyjściowe słowo binarne, którego długość jest skończona i określana jako rozdzielczość przetwornika wyrażana w bitach. Znając rozdzielczość oraz zakres przedziału napięcia wejściowego przetwornika można określić wartość reprezentowaną przez najmniej znaczący bit (ang. *least significant bit*) za pomocą wzoru:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | gdzie: |  |  |
|  |  |  | - wartość najmniej znaczącego bita, |
|  |  |  | - przedział napięcia wejściowego przetwornika A/C, |
|  |  |  | - długość słowa (liczba bitów). |

Wartość najmniej znaczącego bita jest wielkością niepodzielna, stąd digitalizowany sygnał będzie miał amplitudę będącą wielokrotnością wartości lsb. Każda pośrednia wartość pojawiająca się na wejściu przetwornika A/C będzie wartością najlepszego estymatora wartości wejściowej. Niedokładności w tym procesie zwane są błędami kwantyzacji. Dla idealnego przetwornika analogowo-cyfrowego błąd kwantyzacji jest nie większy niż ± ½ lsb, co wynika z zaokrąglania.

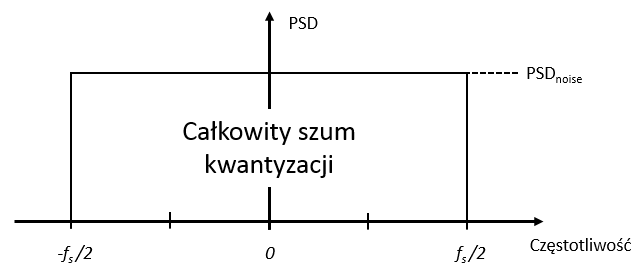
### Szum kwantyzacji

Zakładając, że jeżeli wejściowy sygnał analogowy podawany na wejście ADC przyjmuje wartości, które mieszczą się w większej części zakresu napięcia wejściowego przetwornika, a sygnał nie posiada dominujących składowych okresowych, to wartości szumu kwantyzacji są losowe, a jego reprezentacja w dziedzinie częstotliwości ma postać płaskiego widma. Wówczas całkowitą moc szumu kwantyzacji można określić wzorem:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Odnosząc całkowitą moc do pewnej jednostkowej szerokości pasma, uzyska się widmową gęstość mocy – PSD. Jak wspomniano wcześniej, w dziedzinie częstotliwości szum kwantyzacji ma rozkład równomierny w zakresie od *–fs/2* do *+f­s/2* (Rys. 10), a jego amplituda jest wynikiem podzielenia całkowitej mocy szumu kwantyzacji przez szerokość widma:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |



Rys. 10 Widmowa gęstość mocy w dziedzinie częstotliwości idealnego przetwornika A/C[[25]](#footnote-25)

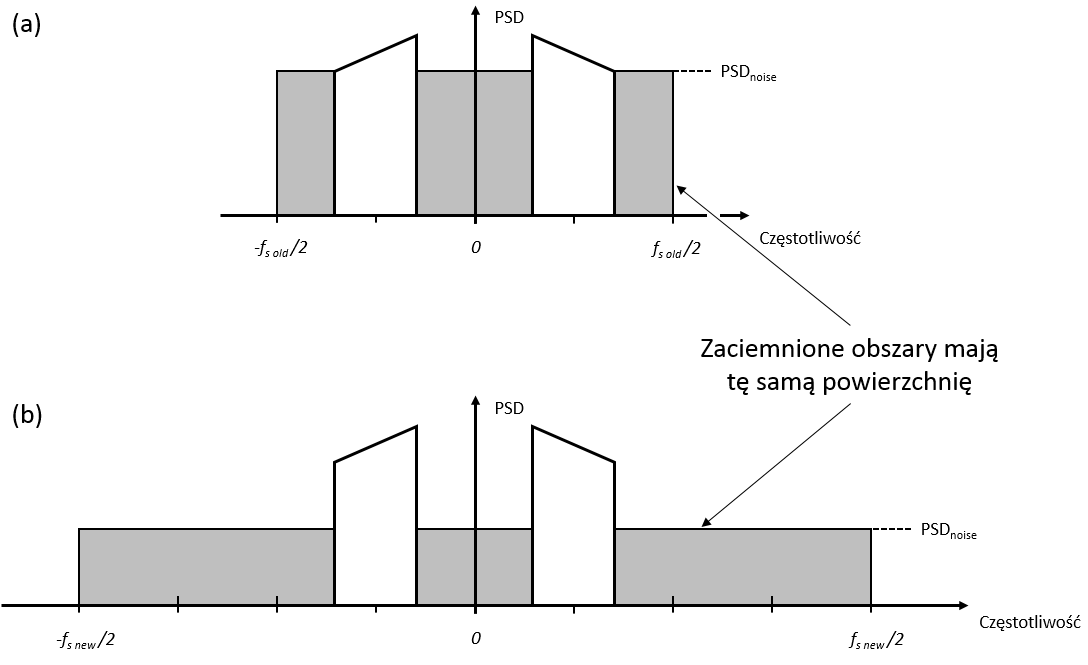
### Redukcja szumu kwantyzacji

Z wzoru (2.5) wynika, że amplitudę całkowitego szumu kwantyzacji można redukować na dwa sposoby. Pierwszym jest zmniejszenie wartości reprezentowanej przez najmniej znaczący bit poprzez zastosowanie przetwornika o większej długości słowa binarnego. Drugim zaś sposobem jest zwiększenie częstotliwości próbkowania *fs*. Poprawę stosunku sygnału do szumu, wynikającą z zastosowania nadpróbkowania, można obliczyć za pomocą wzoru (2.6).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | gdzie: |  |  |
|  |  |  | - zysk stosunku sygnału do szumu, |
|  |  |  | - częstotliwość próbkowania przy nadpróbkowaniu, |
|  |  |  | - częstotliwość próbkowania bez nadpróbkowania. |

Poprzez zwiększenie częstotliwości próbkowania fs-old do częstotliwości fs-new, zakres całkowitej mocy szumu zostanie rozszerzony do szerszego zakresu częstotliwości, tak jak to pokazano na Rys. 11. Otrzymany ciąg próbek można poddać filtracji dolnoprzepustowej, a następnie decymacji do mniejszej częstotliwości próbkowania, zachowując przy tym poprawiony stosunek sygnału do szumu.

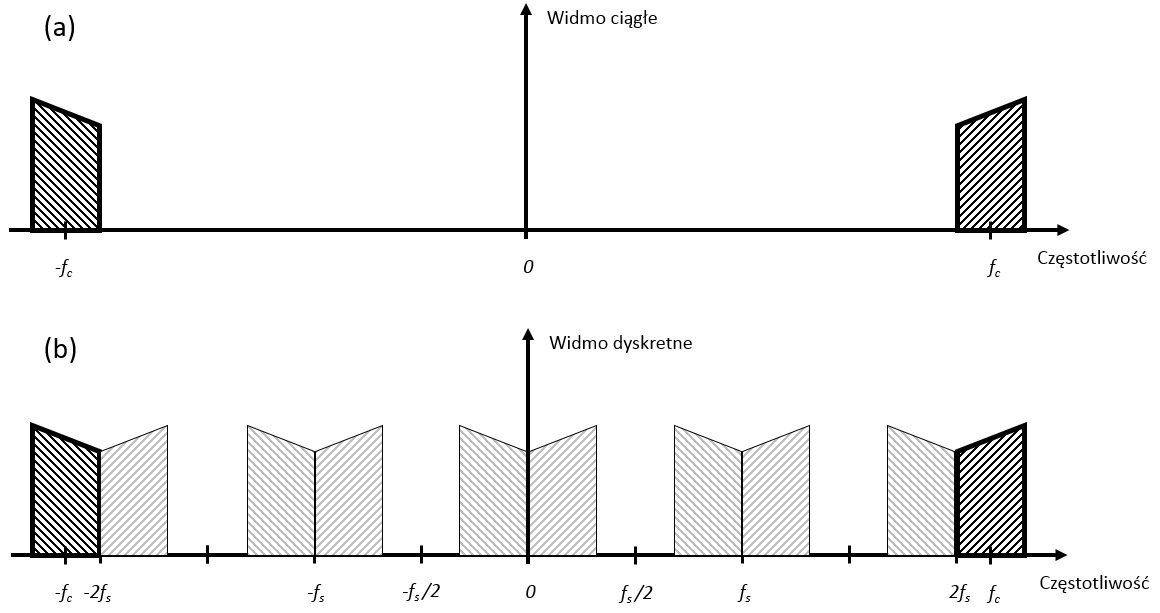


Rys. 11 Przykład nadpróbkowania[[26]](#footnote-26): (a) widmowa gęstość mocy szumu przy częstotliwości próbkowania *fs old*, (b) widmowa gęstość mocy szumu przy częstotliwości próbkowania *fs new.*

## Podpróbkowanie[[27]](#footnote-27)

Próbkowanie pasmowe, zwane też podpróbkowaniem, wykorzystywane jest do próbkowania sygnału ciągłego, którego częstotliwości zawierają się w pewnym określonym paśmie. Jeżeli szerokość pasma wejściowego sygnału ciągłego i częstotliwość środka pasma na to pozwolą, podpróbkowanie pozwoli na zmniejszenie wymagań stawianych częstotliwości próbkowania przez przetwornik A/C, która w tym przypadku może być niższa niż wynikająca z omówionego wcześniej twierdzenia o próbkowaniu. Dodatkowo próbkowanie pasmowe ogranicza pojemność pamięci cyfrowej, która jest niezbędna do przechowywania spróbkowanego sygnału.

Operacja próbkowania i powielania widma są ze sobą ściśle powiązane. Wiedząc, że każda częstotliwość posiada swój odpowiednik w przedziale częstotliwości od 0 do *fs/2*, można, przy pewnych warunkach, przedstawić sygnał pasmowy próbkując go z częstotliwością dużo mniejszą niż podwojona częstotliwość maksymalna tego sygnału, jak to zostało przedstawione na Rys. 12.



Rys. 12 Próbkowanie sygnału pasmowego o częstotliwości nośnej *fc*[[28]](#footnote-28): (a) oryginalne widmo sygnału ciągłego, (b) powielenia widma spróbkowanego sygnału, dla odpowiednio dobranej częstotliwości próbkowania, mniejszej od częstotliwości Nyquista.

### Warunki prawidłowego próbkowania pasmowego

Widmo sygnału spróbkowanego ulega powieleniu i przesunięciu, lecz jego rozpiętość się nie zmienia. Dlatego, chcąc poprawnie zaprezentować widmo sygnału pasmowego, należy mu zapewnić odpowiednią szerokość częstotliwości, w której będzie reprezentowane. Szerokość ta jest ograniczona przez częstotliwość Nyquista i wynosi połowę częstotliwości próbkowania. Stąd też pierwszym warunkiem, który musi zostać spełniony celem prawidłowego wykonania podpróbkowania, jest dobranie częstotliwości próbkowania większej niż podwojona wartość szerokości pasma, w której przemiatany jest badany sygnał (wzór (2.7)).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | gdzie: |  |  |
|  |  |  | - szerokość pasma sygnału wejściowego. |

Niestety spełnienie powyższego warunku nie gwarantuje jeszcze, że otrzymane widmo będzie w prawidłowy sposób reprezentowane w formie dyskretnej. W zależności od obranej częstotliwości próbkowania, powielenia widma będą zmieniały swoje położenie, a dla niektórych przypadków będą wręcz na siebie nachodzić powodując pojawienie się aliasingu. Z tego powodu spełniony musi zostać jeszcze jeden warunek opisany wzorem (2.8).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | gdzie: |  |  |
|  |  |  | - częstotliwość nośna sygnału (środkowa częstotliwość wokół której skupiony jest sygnał pasmowy), |
|  |  |  | - dowolna liczba naturalna, zapewniająca spełnienie pierwszego warunku. |

Dopiero spełnienie obu powyższych warunków pozwoli dobrać taką częstotliwość próbkowania, która pozwoli na prawidłowe zastosowanie metody podpróbkowania bez niekorzystnych wpływów zjawiska aliasingu.

# Układ określania prędkości w zestawie Wega

Zestaw Wega umożliwia śledzenie celów w odległości i prędkości. W ramach niniejszej pracy postanowiono opracować układ analizy widmowej do przetwarzania sygnałów w kanale obserwacji prędkości dla zestawu Wega.

W zestawie zastosowano tzw. radar Dopplerowski, który opromieniowuje cel falą elektromagnetyczną w postaci wiązki ciągłej o określonej częstotliwości *f0­*, a następnie bada sygnał odbity od tego celu. Za badanie tego sygnału odpowiada układ automatycznego śledzenia celu w prędkości, który jest przeznaczony do dokładnego pomiaru składowej dopplerowskiej występującej w fali elektromagnetycznej odbitej od opromieniowanego obiektu.

## Efekt Dopplera[[29]](#footnote-29)

Układ określania prędkości zastosowany w zestawie Wega wykorzystuje zjawisko zmiany częstotliwości fali elektromagnetycznej na skutek odbicia od poruszającego się obiektu. Zjawisko to nazywane jest efektem Dopplera. Znając różnicę częstotliwości pomiędzy wyemitowaną a odebraną falą elektromagnetyczną (częstotliwość dopplerowską) można obliczyć prędkość z jaką przemieszcza się opromieniowany obiekt wg zależności:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | gdzie: |  |  |
|  |  |  | - prędkość poruszającego się obiektu, |
|  |  |  | - częstotliwość dopplerowska, |
|  |  |  | - częstotliwość emitowanej fali, |
|  |  |  | - prędkość rozchodzenia się fali w danym ośrodku. |

## Zasada pracy radiolokacyjnej stacji podświetlania celów

Urządzenie nadawcze stacji generuje ciągłą falę elektromagnetyczną o częstotliwości f0 i poprzez układ antenowo-przesyłowy emituje ją w kierunku celu. Po odbiciu od celu, sygnał o częstotliwości *f0+fD* zostaje odebrany przez antenę odbiorczą radiolokacyjnej stacji podświetlania celów i doprowadzany do wielkoczęstotliwościowej części urządzenia odbiorczego, gdzie zostaje poddany wzmocnieniu i selekcji szumowej, a następnie podany na pierwszy stopień mieszacza. W rezultacie zmieszania i przekształcenia dwóch sygnałów: sygnału odbitego od celu i heterodyny, na wyjściu mieszacza wydzielony zostaje sygnał o częstotliwości pośredniej *fpcz I = 27,885 MHz – fD*.

W kolejnym etapie sygnał przekazywany jest do części małoczęstotliwościowej urządzenia odbiorczego, gdzie znajduje się kolejny układ mieszający. Mieszacz przekształca częstotliwość sygnału z *fpcz I* do *fpcz II = 9,295 MHz + fD*.

Z wyjścia drugiego mieszacza sygnał podawany jest na pakiet filtrów reżekcyjnych. Ich przeznaczeniem jest tłumienie sygnałów, których częstotliwość dopplerowska jest bliska zeru. Do takich sygnałów należą m. in.: sygnał przesączający się z nadajnika, sygnały odbite od przedmiotów terenowych, sygnały zakłóceń atmosferycznych, sygnały odbite od zakłóceń pasywnych.

Po filtracji w filtrach reżekcyjnych sygnał podawany jest na wejście trzeciego mieszacza, w którym jego częstotliwość zostaje przekształcona do *fpcz III = 3,135 MHz - fD*. Wyjściowa częstotliwość dopplerowska ma odwróconą wartość. Jest to uwarunkowane odwracaniem widma sygnału na każdym z trzech stopni przemiany częstotliwości.

Sygnał o częstotliwości *fpcz III* zostaje poddany procesowi cyfrowego przetwarzania sygnałów, gdzie za pomocą odpowiednich algorytmów następuje jego obróbka i przekształcenie do postaci widmowej umożliwiającej zobrazowanie.

## Układ analizy widmowej

Analiza widmowa pozwala określić różnicę częstotliwości pomiędzy badanym sygnałem, a częstotliwością odniesienia *fpcz = 3,135 MHz*, czyli *fpcz III*dla której składowa dopplerowska nie występuje. Ta rozbieżność częstotliwości jest wprost proporcjonalna do prędkości radialnej obiektu, która może zostać obliczona przy wykorzystaniu wzoru (2.9). W zestawie Wega cele prezentowane są w postaci pików na widmie odebranego sygnału, a ich rozmieszczenie informuje o prędkości danego obiektu.

Opracowując układ analizy widmowej należy wziąć pod uwagę ograniczenia wynikające z funkcjonowania i pracy zestawu. Zapewni to obserwację sygnałów odbitych od celów, których prędkości radialne leżą w zakresie odziaływania ogniowego zestawu Wega.

Wiadomości wymagające uwzględnienia podczas tworzenia układu:

* Kanał obserwacji zabezpiecza monitoring obiektów powietrznych przemieszczających się w zakresie prędkości radialnych od -500 m/s do +1500 m/s,
* Radiolokacyjna stacja podświetlania celów pracuje w paśmie symbolizowanym przez literę „C” według oznaczeń tradycyjnych, czyli w przedziale 4 – 8 GHz. W pracy przyjęto częstotliwość nośną sygnału *f0=6,5 GHz*,
* Wynikowe pasmo przenoszenia (zakres zmian częstotliwości dopplerowskich) zawiera się w zakresie od -100 kHz do +50 kHz względem częstotliwości pośredniej. Jest ono asymetryczne oraz odwrócone.

# Symulacje komputerowe

Wykonana analiza zasad pracy i funkcjonowania zestawu wykazały, że, chcąc zaprojektować układ analizy widmowej zestawu Wega, nieodzowne jest przeprowadzanie badań wpływu częstotliwości próbkowania na widmo sygnału w kanale obserwacji. W celu poprawy rozróżnialności widmowej postanowiono dodatkowo przeprowadzić badania wpływu parametrów FFT na rozróżnialność widmową, a chcąc polepszyć jakość stosunku sygnału do szumu sprawdzone zostaną wpływy okien czasowych oraz uśrednianie wielu widm.

Zważywszy na fakt, że badany sygnał posiada informacje zawierające się w relatywnie bardzo wąskim paśmie porównując z częstotliwością pośrednią, zdecydowano, że wykorzystana zostanie metoda podpróbkowania, która została omówiona w rozdziale 2.6.

## Badanie wpływu częstotliwości podpróbkowania na widmo sygnału

Pasmo przenoszenia toru obserwacji wyznacza granicę częstotliwości podpróbkowania. Ze względu na asymetryczność widma sygnału względem częstotliwości pośredniej niezbędny jest dobór okresu próbkowania zapewniający uniknięcie zjawiska aliasingu.

Celem badania jest określenie częstotliwości podpróbkowania, która zapewnia poprawne i jednoznaczne przetwarzanie sygnału w dziedzinie częstotliwości z uwzględnieniem nieproporcjonalności widma kanału obserwacji.

W badaniach przyjęto następujące założenia:

* częstotliwość pośrednia *fpcz = 3,135 MHz,*
* pasmo przenoszenia kanału obserwacji zawiera się w zakresie od   
  -100 kHz do +50 kHz i jest asymetryczne.

Badania przeprowadzono dla następujących parametrów:

* prostokątne okno normalizujące widmo sygnału,
* liczba próbek sygnału N = 2048.

Jako sygnał wejściowy przyjęto szerokopasmowy sygnał, którego pasmo zawierało się w zakresie od *fBd = 3,035 MHz*, do *fBg = 3,185 MHz* zgodnie z pasmem przenoszenia kanału obserwacji.

Chcąc odpowiednio dobrać częstotliwość próbkowania przy wykorzystaniu podpróbkowania należy zastosować się do warunków omówionych w rozdziale 2.6.1. Zgodnie z zawartymi tam informacjami częstotliwość próbkowania musi zawierać się w pewnych określonych przedziałach, inaczej badany sygnał narażony będzie na zjawisko aliasingu i nie zostanie zapewniona jednoznaczność pomiarów. Poniżej zdefiniowano owe warunki:

* Warunek I:
* Warunek II:

Zakresy częstotliwości próbkowania dla różnych wartości m przedstawiono w Tab. 1. Kolorem czerwonym zaznaczono częstotliwości, które nie spełniają pierwszego warunku, co czyni je nieodpowiednimi do zaimplementowania. Wybór częstotliwości próbkowania z zakresu od *f­s\_min* do *fs\_max* zapewni, że całe pasmo badanego sygnału będzie wolne od niejednoznaczności i aliasingu (o ile warunek nr 1 zostanie spełniony).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *m* | *fs\_min(m)* [Hz] | *fs\_max(m)* [Hz] |
| 1 | 3185000 | 6070000 |
| 2 | 2123333,333 | 3035000 |
| 3 | 1592500 | 2023333,333 |
| 4 | 1274000 | 1517500 |
| 5 | 1061666,667 | 1214000 |
| 6 | 910000 | 1011666,667 |
| 7 | 796250 | 867142,8571 |
| 8 | 707777,7778 | 758750 |
| 9 | 637000 | 674444,4444 |
| 10 | 579090,9091 | 607000 |
| 11 | 530833,3333 | 551818,1818 |
| 12 | 490000 | 505833,3333 |
| 13 | 455000 | 466923,0769 |
| 14 | 424666,6667 | 433571,4286 |
| 15 | 398125 | 404666,6667 |
| 16 | 374705,8824 | 379375 |
| 17 | 353888,8889 | 357058,8235 |
| 18 | 335263,1579 | 337222,2222 |
| 19 | 318500 | 319473,6842 |
| 20 | 303333,3333 | 303500 |
| 21 | 289545,4545 | 289047,619 |
| 22 | 276956,5217 | 275909,0909 |

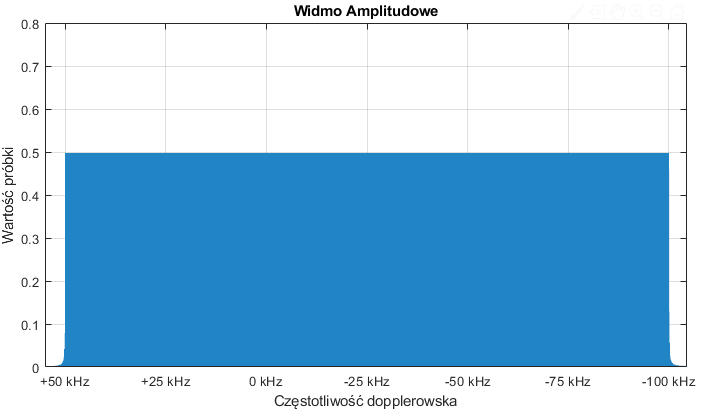
Tab. 1 Zestawienie zakresów częstotliwości podpróbkowania wykluczających występowanie zjawiska aliasingu.

Za pomocą środowiska Matlab przeprowadzono symulację zmian częstotliwości próbkowania w zakresie 300 ÷ 400 kHz z krokiem co 1 kHz obserwując przesuwanie się widma w całym zakresie pasma przenoszenia kanału obserwacji. Częstotliwości próbkowania, które podczas symulacji zapewniały poprawne i jednoznaczne przetwarzanie dla całego badanego pasma bez występowania zjawiska aliasingu przedstawiono w Tab. 2. Jak można zaobserwować, wyniki symulacji pokrywają się z zakresami częstotliwości teoretycznych gwarantujących jednoznaczność pomiaru (Tab. 1).

Chcąc uzyskać jak najmniejszą rozdzielczość widmową, a zarazem największą dokładność w jej określaniu, należy przyjąć najmniejszą możliwą częstotliwość próbkowania. Po analizie wyników symulacji postanowiono zastosować w kolejnych etapach pracy częstotliwość próbkowania wynoszącą 319 kHz, której pasmo przenoszenia przedstawiono na Rys. 13.

|  |  |
| --- | --- |
| *L.p.* | *fs [kHz]* |
| 1 | 319 |
| 2 | 336 |
| 3 | 337 |
| 4 | 354 |
| 5 | 355 |
| 6 | 356 |
| 7 | 357 |
| 8 | 375 |
| 9 | 376 |
| 10 | 377 |
| 11 | 378 |
| 12 | 379 |
| 13 | 399 |
| 14 | 400 |

Tab. Częstotliwości próbkowania zapewniające poprawne przetwarzanie całego badanego pasma.



Rys. Pasmo przenoszenia kanału obserwacji dla częstotliwości próbkowania 319 kHz.

## Badanie wpływu parametrów FFT na rozróżnialność widmową

Na podstawie wzoru (1.3) można wywnioskować, że rozdzielczość częstotliwościowa jest zależna od dwóch parametrów: częstotliwości próbkowania i liczby pobranych próbek.

# Bibliografia

1. Smith S. W., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, Wydawnictwo BTC, Warszawa, 2003;
2. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2006;
3. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2010;
4. *Zestaw rakietowy S-200WE – opis techniczny*, Dowództwo wojsk obrony powietrznej kraju, Warszawa, 1989;
5. Sobkowski J., *Częstotliwościowa analiza sygnałów*, Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej, Łódź, 1975;
6. Szabatin J., *Przetwarzanie sygnałów*, 2003;
7. Tumański S., *Technika pomiarowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2007;
8. Zieliński T.P., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: od teorii do zastosowań*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2007;

# Spis rysunków i tabel

## Spis rysunków

Nie można odnaleźć pozycji dla spisu ilustracji.

## Spis tabel

Nie można odnaleźć pozycji dla spisu ilustracji.

1. Sobkowski J., *Częstotliwościowa analiza sygnałów*, Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej, Łódź, 1975, str. 19-24. [↑](#footnote-ref-1)
2. Szabatin J., *Przetwarzanie sygnałów*, 2003, str. 5; [↑](#footnote-ref-2)
3. Tumański S., *Technika pomiarowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2007, str. 267; [↑](#footnote-ref-3)
4. Strona internetowa: https://elektronikab2b.pl/technika/22631-pomiary-widma-klasycznymi-analizatorami-i-analizatorami-z-cyfrowa-p.cz.-cz.-1 (20.04.2019); [↑](#footnote-ref-4)
5. Smith S. W., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, Wydawnictwo BTC, Warszawa, 2003, str. 142‑148. [↑](#footnote-ref-5)
6. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2006, str. 60-64 oraz 75-76; [↑](#footnote-ref-6)
7. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2006, str. 72-74; [↑](#footnote-ref-7)
8. Opracowanie własne. [↑](#footnote-ref-8)
9. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2006, str. 80-87. [↑](#footnote-ref-9)
10. Erhard J., *DFT - przekształcenie Fouriera w wersji cyfrowej* (online), http://livesound.pl/tutoriale/kursy/4357-dft-przeksztalcenie-fouriera-w-wersji-cyfrowej (25.04.2019); [↑](#footnote-ref-10)
11. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2006, str. 88-95. [↑](#footnote-ref-11)
12. Szabatin J., Przetwarzanie sygnałów, 2003, str. 74; [↑](#footnote-ref-12)
13. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2006, str. 92. [↑](#footnote-ref-13)
14. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2006, str. 132-147. [↑](#footnote-ref-14)
15. Zieliński T.P., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: od teorii do zastosowań*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2007, str. 241. [↑](#footnote-ref-15)
16. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2006, str. 143. [↑](#footnote-ref-16)
17. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2006, str. 37-40. [↑](#footnote-ref-17)
18. Strona internetowa: https://pl.wikipedia.org/wiki/Aliasing\_(przetwarzanie\_sygna%C5%82%C3%  
    B3w)#/media/File:AliasingSines.svg (20.03.2019). [↑](#footnote-ref-18)
19. Smith S. W., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, Wydawnictwo BTC, Warszawa, 2003, str. 47‑48. [↑](#footnote-ref-19)
20. Smith S. W., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, Wydawnictwo BTC, Warszawa, 2003, str. 48‑53. [↑](#footnote-ref-20)
21. Opracowanie własne na podstawie Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2006, str. 43; [↑](#footnote-ref-21)
22. Strona internetowa: http://ptgmedia.pearsoncmg.com/images/chap2\_0131089897/elementLinks/  
    02fig04.gif (05.04.2019). [↑](#footnote-ref-22)
23. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2010, str. 506-508; [↑](#footnote-ref-23)
24. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2010, str. 451; [↑](#footnote-ref-24)
25. Opracowanie własne na podstawie Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2010, str. 506; [↑](#footnote-ref-25)
26. Opracowanie własne na podstawie Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2010, str. 507; [↑](#footnote-ref-26)
27. Lyons R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2010, str. 48-52; [↑](#footnote-ref-27)
28. Opracowanie własne. [↑](#footnote-ref-28)
29. Strona internetowa: http://www.radary.az.pl/doppler.php [↑](#footnote-ref-29)